Introduction à la statique du solide

P9-12 – Chapitre 1

I. Produit scalaire et produit vectoriel

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \qquad \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ z_u x_v - z_v x_u \\ x_u y_v - x_v y_u \end{pmatrix}$$

II. Torseur

1. Définition et transport

$$\boxed{\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_A} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_B} = \overrightarrow{m_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{Bmatrix}_B} \qquad \{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} R_x & m_x \\ R_y & m_y \\ R_z & m_z \end{Bmatrix}_A$$

2. Propriétés

- On somme et on compare 2 torseurs au même point.
- **Equiprojectivité :** $\overrightarrow{m_P} \cdot \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{m_M} \cdot \overrightarrow{PM}$
- **Invariant scalaire :** $\boxed{C = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m_P} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{m_M}}$
- **Comoment :** $\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{m_{2_P}} = \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{m_{1_P}}}$

3. Classification

- **Torseur nul** $(C = 0)$: $\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_M$ $\quad cst \ \forall \ M$
- **Torseur couple** $(C = 0)$: $\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{m} \end{Bmatrix}_M$ $\quad cst \ \forall \ M$
- **Torseur glisseur** $(C = 0)$: $\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_A} \end{Bmatrix}_A$ $\quad \overrightarrow{m_A} \perp \vec{R}$ $\quad$ Axe du glisseur : $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{m_A}}{R^2} + \lambda \vec{R}$

  $\lambda = 0 \Leftrightarrow \vec{m} = 0$
- **Torseur général** $(C \neq 0)$: $\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_A} \end{Bmatrix}_A = \underbrace{\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \overrightarrow{m_A^1} \end{Bmatrix}_A}_{\text{Torseur glisseur}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \overrightarrow{m_A^2} \end{Bmatrix}_A}_{\text{Torseur couple}}$

  $\overrightarrow{m_A} \not\perp \vec{R}$ $\qquad \overrightarrow{m_A^1} \perp \vec{R}$ $\qquad \overrightarrow{m_A^2} \parallel \vec{R}$

III. Statique du solide

1. Torseur des actions mécaniques

$\boxed{\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ 0 \end{Bmatrix}_A}$ force $\vec{F}$ appliquée en A $\qquad \boxed{\{\mathcal{T}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{m} \end{Bmatrix}_M}$ moment $\vec{m}$

2. Principe fondamental de la statique (PFS)

> Il existe un repère galiléen tel que pour tout sous ensemble e de E, le torseur des actions mécaniques extérieures à e est nul.

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\bar{e}/e}\} = \{0\}} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_{\bar{e}/e}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{m_{\bar{e}/e}} = \vec{0} \quad (\exists \ M \Rightarrow \forall \ F) \end{cases}$$